181

Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Cadre : On se place dans un espace affine réel $\mathcal{E}$ de direction $\vec{E}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On lui associe une métrique : $d(A,B) = \|\vec{AB}\|$.

I) Barycentre dans un espace affine

A] Définitions et premières propriétés [1]

Def 1 : On appelle système pondéré de points tout uplets : $(A_1(\alpha_1), A_2(\alpha_2), \dots, A_p(\alpha_p))$ où $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ et $\alpha_1, \dots \alpha_p \in \mathbb{R}$. A un tel système, on associe la fonction de Leibniz : $\forall M \in \mathcal{E}, f(M) = \sum_{i=1} \alpha_i \vec{MA_i}$

Prop-def 2 : Si $\sum_{i=1} \alpha_i = 0$, f est constante. Sinon : $\exists! G \in \mathcal{E}, f(G) = \vec{0}$. G est appelé barycentre de $(A_1(\alpha_1), \dots, A_p(\alpha_p))$, on note $G = ba(A_1(\alpha_1), \dots, A_p(\alpha_p))$. Dans le cas où $\sum_{i=1} \alpha_i = 1$, on le note $G = \sum_{i=1} \alpha_i A_i$.

Prop 3 : $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $ba(A_1(\lambda\alpha_1), \dots A_p(\lambda\alpha_p)) = ba(A_1(\alpha_1), \dots, A_p(\alpha_p))$ (homogénéité)

Prop 4 : $\forall \sigma \in S_p$, $ba(A_{\sigma(1)}(\alpha_{\sigma(1)}), \dots, A_{\sigma(p)}(\alpha_{\sigma(p)})) = ba(A_1(\alpha_1), \dots, A_p(\alpha_p))$ (commutativité)

Prop 5 : Soit $J \subset [\![1;p]\!]$ tel que $\sum_{i \in J} \alpha_i \neq 0$. Soit $G = ba((A_i(\alpha_i))_{i \in J})$. Alors $ba(A_1(\alpha_1), \dots, A_p(\alpha_p)) = ba(G(\sum_{i \in J} \alpha_i), (A_k(\alpha_k))_{k \notin J})$ (associativité)

Def 6 : Si $\forall i,j \in [\![1;p]\!], \alpha_i = \alpha_j$, G est appelé isobarycentre.

Ex 7 : Dans le cas de deux points $A, B \in \mathcal{E}$, l'isobarycentre de A et B est appelé milieu du segment $[A;B]$.

B] Exemples de calcul de barycentres [1]

Thm 8 : Soit ABC un triangle de $\mathcal{E}$. Les médianes de ABC sont concourantes en un point appelé centre de gravité de ABC qui est l'isobarycentre de A, B et C.

Thm 9 : Soit $ABCD$ un parallélogramme. Alors l'isobarycentre de A, B, C, D coïncident avec le milieu des diagonales.

Thm 10 : Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soient O l'isobarycentre de A,B,C,D et G l'isobarycentre de B,C,D. Alors $\vec{AO} = \frac{3}{4}\vec{AG}$.

Prop 11 : Soit $P_0 \subset \mathbb{R}^2$ un polygône. On définit une suite de polygones (P_k), P_{k+1} étant définit par les milieux des arrêtes de P_k. Alors les sommets de (P_k) convergent vers l'isobarycentre de P_0.

Prop 12 : Soient $A, B \in \mathcal{E}$. L'ensemble des barycentres de A et B est la droite (AB).

Prop 13 : Soient $A, B, C \in \mathcal{E}$ non alignés. L'ensemble des barycentres de A, B et C est le plan (ABC).

C] Lien avec les sous-espaces affines [1], [2]

Def 14 : Soit $F \subset \mathcal{E}$. F est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ s'il est lui-même un espace affine de direction $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

Thm 15 : $F \subset \mathcal{E}$ est un sous espace affine de direction $\vec{F}$ si et seulement si $\exists A \in F, F = A + \vec{F}$.

Prop 16 : Toute intersection de sous-espace affine est soit vide, soit un sous espace affine.

Def 17 : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. On appelle sous-espace affine engendré par $\mathcal{A}$ le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$, noté $Aff(\mathcal{A})$. Il s'agit de l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant $\mathcal{A}$.

Ex 18 : Si A, B, C sont trois points de $\mathcal{E}$, $Aff(\{A;B\}) = (AB)$, $Aff(\{A;B;C\}) = (ABC)$.

Thm 19 : Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. $Aff(\mathcal{A})$ est l'ensemble des barycentres de $\mathcal{A}$.

Ex 20 : On retrouve les résultats 12 et 13

Cor 21 : $F \subset E$, $F \neq \emptyset$, est un sous-espace affine si et seulement si F est stable par barycentration.

Def 22 : Soient F un autre espace affine de direction $\vec{F}$ et $f : E \to F$. f est dite affine si il existe $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ linéaire telle que $\forall M \in E, \forall \vec{u} \in \vec{E}$, $f(M+\vec{u}) = f(M) + \vec{f}(\vec{u})$.

Prop 23 : $f : E \to F$ est affine si et seulement si f conserve les barycentres.

Cor 24 : Si $f : E \to F$ est affine et $\mathcal{A} \subset E$, alors $f(\mathrm{Aff}(\mathcal{A})) = \mathrm{Aff}(f(\mathcal{A}))$.

D] Repérage, coordonnées barycentriques [1], [3]

[1] **Thm-def 25** : Soient $A_0, A_1, \dots, A_k \in E$. On a équivalence entre :
- $\forall j \in [\![0;k]\!]$, $(\overrightarrow{A_jA_i})_{i\neq j}$ est libre
- $\forall j \in [\![0;k]\!]$, $A_j \notin \mathrm{Aff}(A_i)_{i\neq j}$
- $\exists j \in [\![0;k]\!]$, $(\overrightarrow{A_jA_i})_{i\neq j}$ est libre.

On dit dans ce cas que $(A_0, \dots, A_k)$ est affinement libre. Dans le cas où $k = n$, on dit que $(A_0, \dots, A_n)$ est une base ou un repère affine.

Rem 26 : Pour tout $j \in [\![0;k]\!]$, A_j n'est donc pas barycentre des autres points.

Cor-def 27 : Si $R = (A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine de E, alors tout point x s'écrit de manière unique de la forme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i$ où $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ sont appelés les coordonnées barycentriques de x dans R.

Rem 28 : Si on impose pas $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, toutes coordonnées barycentriques d'un point sont proportionnelles.

[3] **Def 29** : Soit ABC un triangle. Soit $M \in E$. On définit l'aire algébrique de MBC, notée aire(MBC), comme étant son aire géométrique affectée du signe + si MBC et ABC ont même orientation, du signe − sinon. On définit de même aire(MCA), aire(MAB). On résume cette règle en annexe.

Thm 30 : Soit $M \in E$. Alors (aire(MBC), aire(MCA), aire(MAB)) définit un système de coordonnées barycentriques de M dans le repère (A,B,C). [3]

App 31 : Si I est le centre du cercle inscrit dans ABC, alors (BC, AC, AB) est un système de coordonnées barycentriques de I dans (A,B,C).

II) Ensembles convexes

A] Définitions et premières propriétés [2]

Def 32 : On appelle segment d'extrémités $A, B \in E$ l'ensemble : $[A;B] = \{tA + (1-t)B \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

Def 33 : $\mathcal{A} \subset E$ est dit convexe si $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $[A;B] \subset \mathcal{A}$.

Ex 34 : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Def 35 : On dit que $M \in E$ est combinaison convexe de $P_1, \dots, P_k \in E$ si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ et $M = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$.

Prop 36 : $\mathcal{A} \subset E$ est convexe si et seulement si $\mathcal{A}$ est stable par combinaison convexe.

Prop 37 : L'image d'un convexe par une application affine est convexe.

Prop 38 : Toute intersection de convexes est convexe.

B] Enveloppes convexes [1], [2]

Prop-def 39 : Soit $\mathcal{A} \subset E$. L'intersection des convexes contenant $\mathcal{A}$ est le plus petit convexe le contenant. Il est appelé enveloppe convexe de $\mathcal{A}$, notée $CV(\mathcal{A})$.

Ex 40 : Si $A, B, C \in E$, $CV(\{A;B\}) = [A;B]$, $CV(\{A;B;C\})$ est l'intérieur du triangle (ABC).

Thm 41 : Soit $\mathcal{A} \subset E$. $CV(\mathcal{A})$ est l'ensemble des barycentres positifs de $\mathcal{A}$, donc l'ensemble des combinaisons convexes de $\mathcal{A}$.

Cor 42 : $\mathcal{A} \subset E$ est convexe si et seulement si il est stable par barycentration positifs.

[1], [2]

DEV 1

Thm 43 : (de Carathéodory) Soit $\mathcal{A} \subset E$, $n = \dim E$. Alors $\mathcal{A}$ est l'ensemble des combinaisons convexes de couples $n+1$ points.

App 44 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. $Ax = 0$ admet une solution non nulle dans $\mathbb{N}^n$ si et seulement si $0_{\mathbb{R}^n}$ est dans l'enveloppe convexe des colonnes de A.

Cor 45 : Si $K \subset E$ est compact, $CV(K)$ est compact.

[5]

Thm 46 : (de Gauss-Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. L'enveloppe convexe des racines de P' est dans celle des racines de P

App 47 : Le plus grand entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les racines non nulles de $(X+1)^{n_0} - X^{n_0} - 1$ soient de module 1 est 7.

C] Points extrémaux [2]

Soit $\mathcal{C} \subset E$ convexe.

Def 48 : Un point extrémal de $\mathcal{C}$ est un point $M \in \mathcal{C}$ qui n'est milieu d'aucun couple distincts de point de $\mathcal{C}$.

Prop 49 : Les assertions suivantes sont équivalentes :
- M est point extrémal de $\mathcal{C}$.
- M n'est contenu dans aucun segments d'extrémités distinctes de $\mathcal{C}$
- M n'est pas combinaison convexe de points de $\mathcal{C} \setminus \{M\}$
- $\mathcal{C} \setminus \{M\}$ est convexe.

Ex 50 : Si $[A;B] \subset E$, A et B sont des points extrémaux de $[A;B]$.

Cor 51 : Si $\mathcal{A} \subset E$, $\mathcal{A}$ contient les points extrémaux de $CV(\mathcal{A})$.

Lem 52 : Si $\mathcal{C}$ est compact, toute droite passant par l'intérieur de $\mathcal{C}$ rencontre sa frontière en deux points

Cor 53 : Si $\mathcal{C}$ est compact, alors $\mathcal{C} = CV(\partial\mathcal{C})$.

Soit K convexe compact de $\mathbb{R}^n$. On souhaite le voir comme enveloppe convexe de ses points extrémaux.

[4]

DEV 2

Lem 54 : Soit $c \in \partial K$. Alors $\exists \varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\varphi(K) \leq \varphi(c)$ (hyperplan d'appui en c)

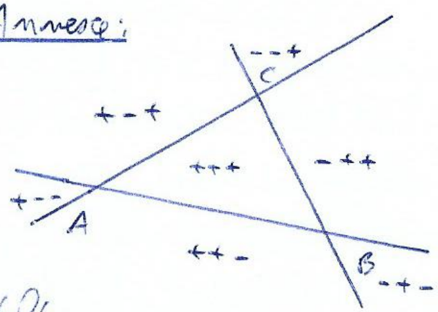
Lem 55 : Soit H un hyperplan d'appui en $c \in \partial K$. $H \cap K$ est un convexe compact et c est extrémal dans K si et seulement si il l'est dans $H \cap K$.

Thm 56 : (de Krein-Millman) K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux

[2]

Rem 57 : Ceci implique que si $K \neq \emptyset$, il existe des points extrémaux à K.

Annexe :



Références :

- Cours de géométrie (Dany-Jack Mercier) [1]
- Algèbre 23 (Aviva Szpirglas) [2]
- [3]
- Oraux X-ENS Analyse 3 (Francinou) [4]
- Oraux X-ENS Algèbre 1 (Francinou) [5]